TRƯỜNG ĐẠI HỌC CẦN THƠ
KHOA CNTT & TRUYỀN THÔNG
BỘ MÔN KHOA HỌC MÁY TÍNH

TOÁN RỜI RẠC
(DISCRETE MATHEMATICS)

08/2013

GV: Trần Nguyễn Minh Thư (tnmthu@ctu.edu.vn)

Luồng cực đại

Khái niệm mạng

Đồ thị có hướng G=(X,E) được gọi là mạng khi:

- Tồn tại duy nhất một đỉnh $s \in X$ mà tại s không có cung đi vào, chỉ có cung đi ra. Gọi s là điểm phát.
- Tồn tại duy nhất một đỉnh $t \in X$ mà tại t không có cung đi ra, chỉ có cung đi vào. Gọi t là điểm thu.
- Mỗi cung e=(i,j) đều được gán một giá trị không âm c(e) hay c(i,j), gọi là khả năng thông qua của cung.
- Nếu không tồn tại cung từ đỉnh i đến đỉnh j thì khả năng thông qua của cung đó được qui ước là bằng không.

Khái niệm mạng

Mạng G=(X,E):

- Ánh xạ f từ E vào R+ được gọi là một luồng trong mạng, cần thỏa các điều kiện:

1) Giới hạn của luồng

- Với mỗi cung e, gọi f(e) là luồng
- Luồng trên cung không vượt quá khả năng thông qua của cung: $0 \leq f(e) \leq c(e)$

Khái niệm mạng

Mạng G=(X,E):

- Ánh xạ f từ E vào R+ được gọi là một luồng trong mạng, cần thỏa các điều kiện:

2) Cân bằng luồng

- Với mỗi đỉnh i không là đỉnh thu, cũng không là đỉnh phát ($i \neq s$ và $i \neq t$) thì tổng luồng trên các cung đi vào i bằng tổng luồng trên các cung từ i đi ra

$$\sum_{\forall(j,i)} f(j,i) = \sum_{\forall(i,k)} f(i,k)$$

Khái niệm mạng

Mạng G=(X,E):

- Ánh xạ f từ E vào R+ được gọi là một luồng trong mạng, cần thỏa các điều kiện:

3) Giá trị luồng

- Tổng luồng trên các cung phát ra từ điểm phát s bằng với tổng luồng trên các cung thu vào tại điểm thu t,

$$\sum_{\forall(s,i)} f(s,i) = \sum_{\forall(j,t)} f(j,t)$$

Tìm luồng cực đại trong mạng

Thuật toán Ford-Fulkerson

- Gán nhãn cho các đỉnh
- Tăng luồng

Tìm luồng cực đại trong mạng

Thuật toán Ford-Fulkerson

- Gán nhãn cho các đỉnh
  - Trước tiên các đỉnh đều chưa có nhãn
  - Mỗi đỉnh sẽ có một trong 3 trạng thái:
    - Đỉnh chưa có nhãn
    - Đỉnh có nhãn nhưng chưa được xét
    - Đỉnh có nhãn và đã được xét
  - Nhãn của một đỉnh x_i có dạng
    - $x_i : [\pm x_{i-1}, \sigma(x_i)]$
    - $+x_i$ cho biết cần tăng luồng theo cung (x_{i-1}, x_i)
    - $-x_i$ cho biết cần giảm luồng theo cung (x_i, x_{i-1})

Thuật toán Ford-Fulkerson

- Gán nhãn cho các đỉnh
  - Bước 1:
    - Tất cả các đỉnh khác chưa có nhãn
    - Gán nhãn cho đỉnh phát s : [+s, ∞]
    - Đỉnh s có nhãn nhưng chưa xét

Thuật toán Ford-Fulkerson

- Gán nhãn cho các đỉnh
  - Bước 2:
    - Chọn một đỉnh x_i có nhãn nhưng chưa xét
      - x_i: $[\pm x_{i-1}, \sigma(x_i)]$
      - Mọi đỉnh u đi ra từ x_i, chưa có nhãn mà $f(x_i,u)<c(x_i,u)$ được gán nhãn:
        - u : $[+x_i, \sigma(u)]$, với $\sigma(u) = \min \{\sigma(x_i), c(x_i,u)-f(x_i,u)\}$
      - Mọi đỉnh v đi tới x_i, chưa có nhãn mà $f(v,x_i)>0$ được gán nhãn
        - v : $[-x, \sigma(v)]$, với $\sigma(v) = \min \{\sigma(x) , f(v,x)\}$
    - ⇨ x_i là đỉnh có nhãn và đã được xét,
    - ⇨ Các u và v là những đỉnh có nhãn nhưng chưa được xét.

Thuật toán Ford-Fulkerson

- Gán nhãn cho các đỉnh
  - Bước 3:
    - Lặp lại bước 2 cho đến khi:
      - Hoặc đỉnh thu t được gán nhãn t: [±y, σ(t)] ⇨ bước 4.
      - Hoặc là không thể gán nhãn cho đỉnh thu t: ⇨ kết thúc thuật toán,

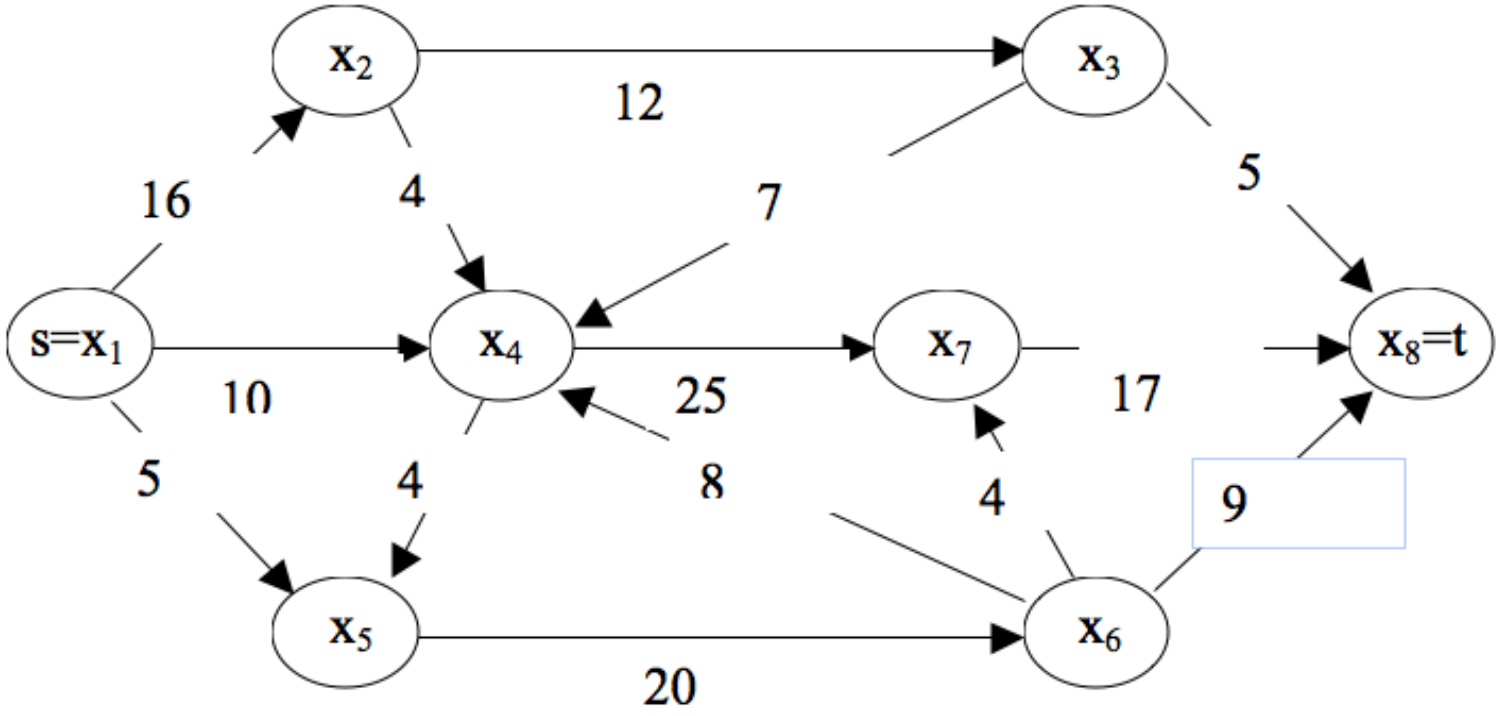
Thuật toán Ford-Fulkerson

- Tăng luồng (dựa vào đường dẫn P: $s= x_1, x_2, \ldots, x_k=t$)
  - Bước 4:
    - Với t : $[x_{k-1}, \sigma(t)]$
    - Xét lần lượt các x từ $t=x_k \Rightarrow x_1=s$
      - Nếu x: $[+u, \sigma(x)]$ thì tăng luồng trên cung (u,x): $f(u,x) = f(u,x) + \sigma(t)$
      - Nếu x: $[-u, \sigma(x)]$ thì giảm luồng trên cung (u,x): $f(u,x) = f(u,x) - \sigma(t)$
    - Trở về bước 1

Bài tập

Đề thi năm 2012 (lần 2)

Câu 10. Tìm luồng cực đại trong mạng sau:

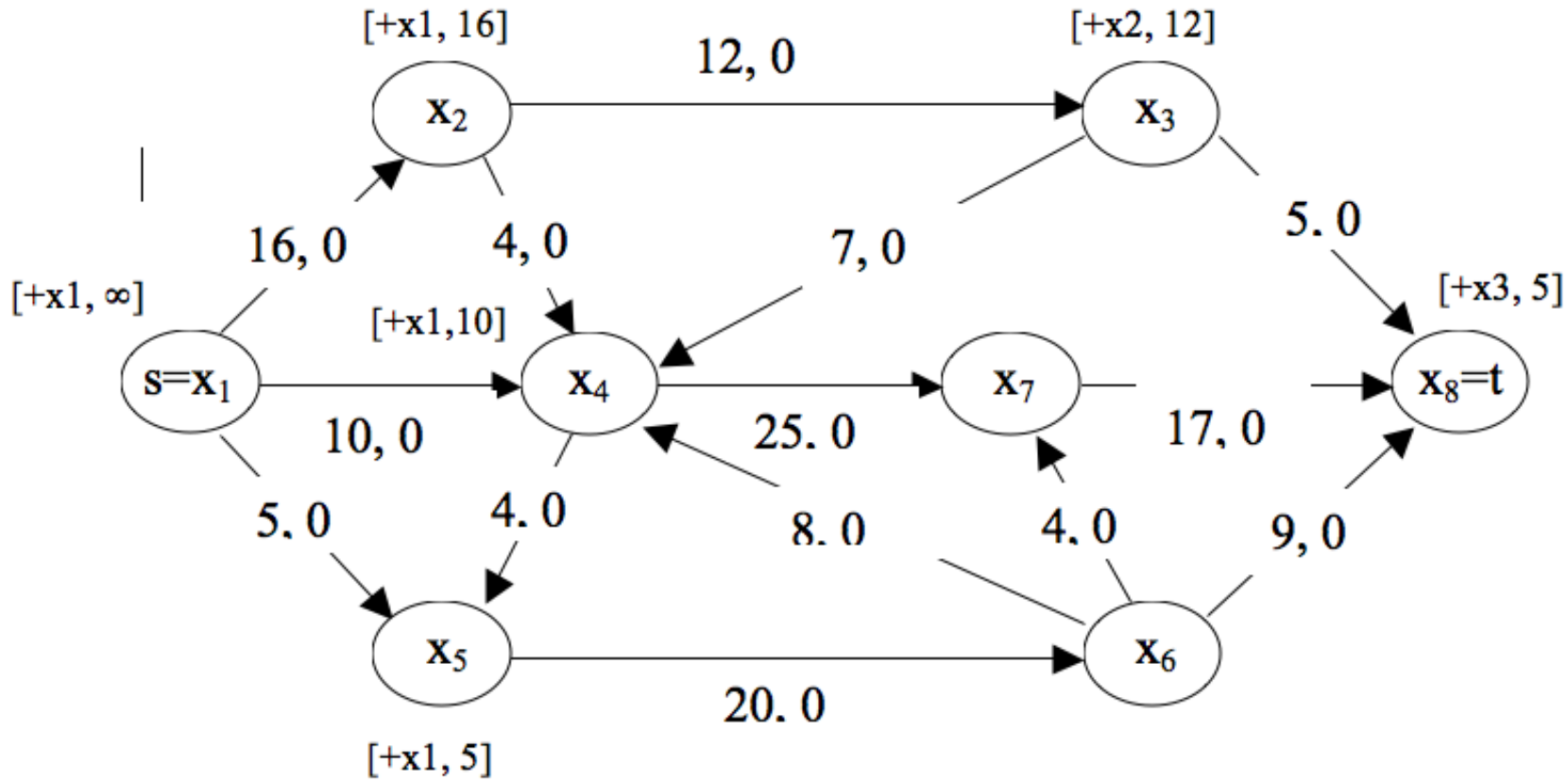


Giải

Bài tập

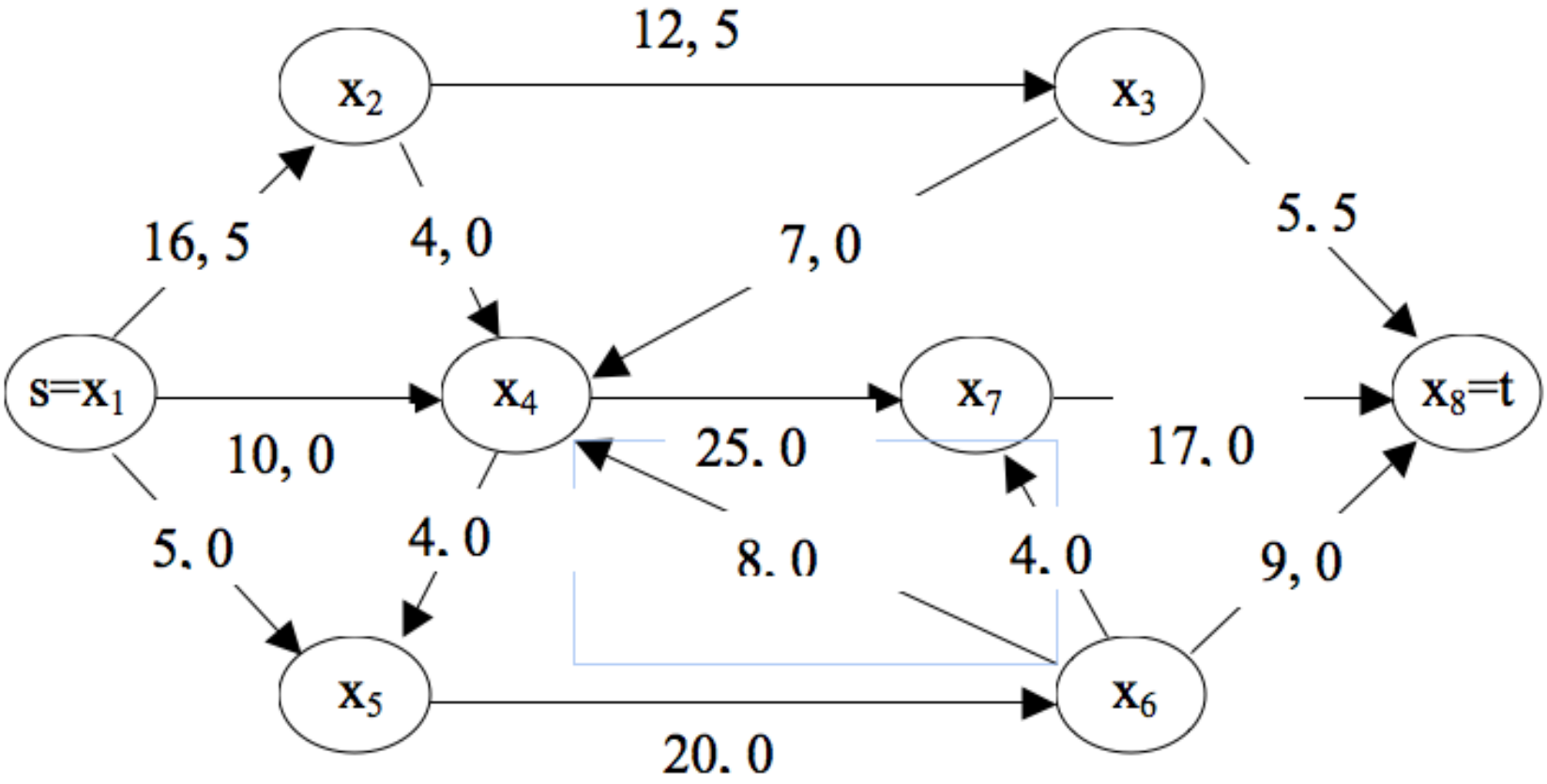
Gán nhãn

Lặp 1



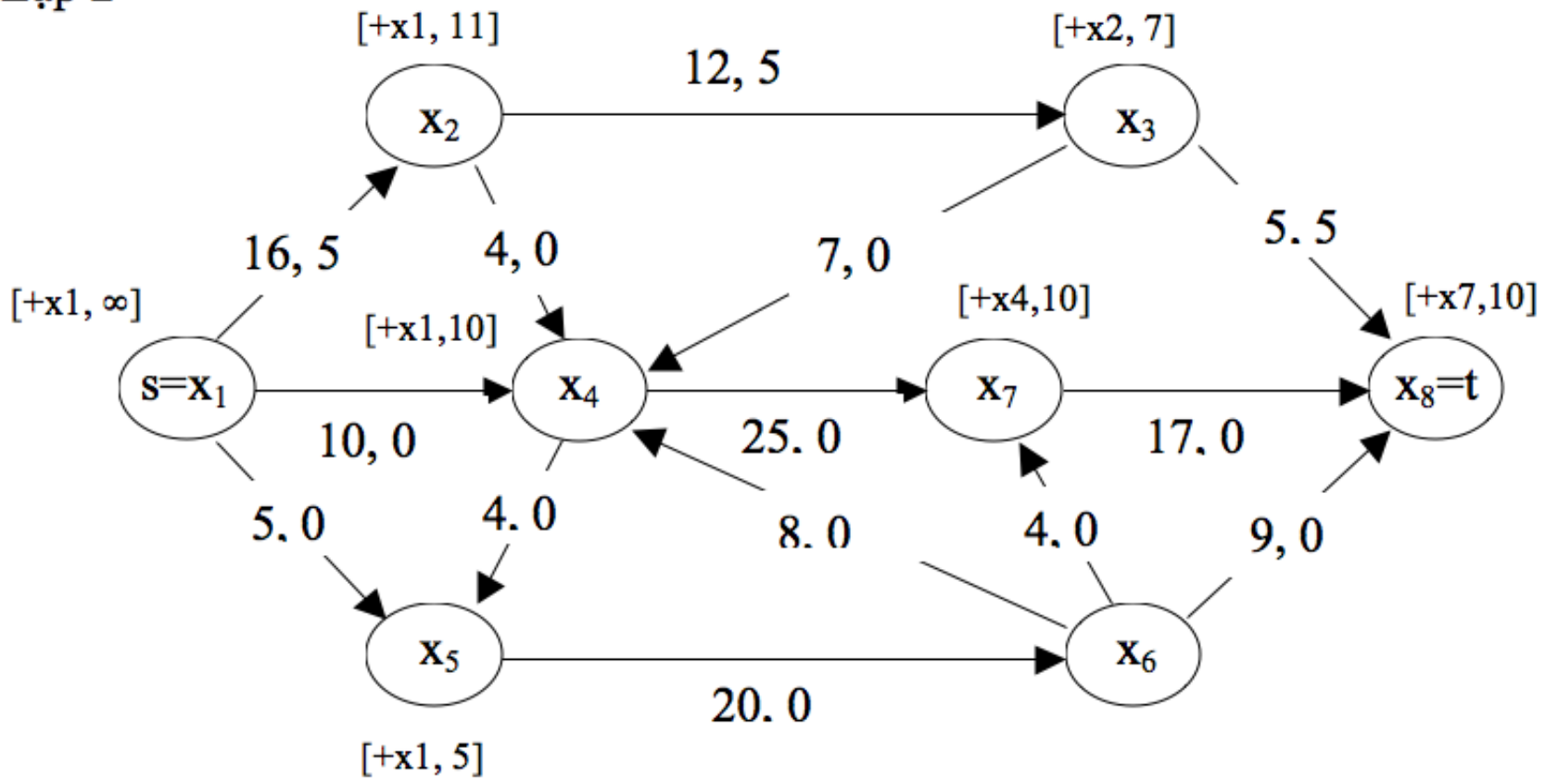
Bài tập

Tăng luồng



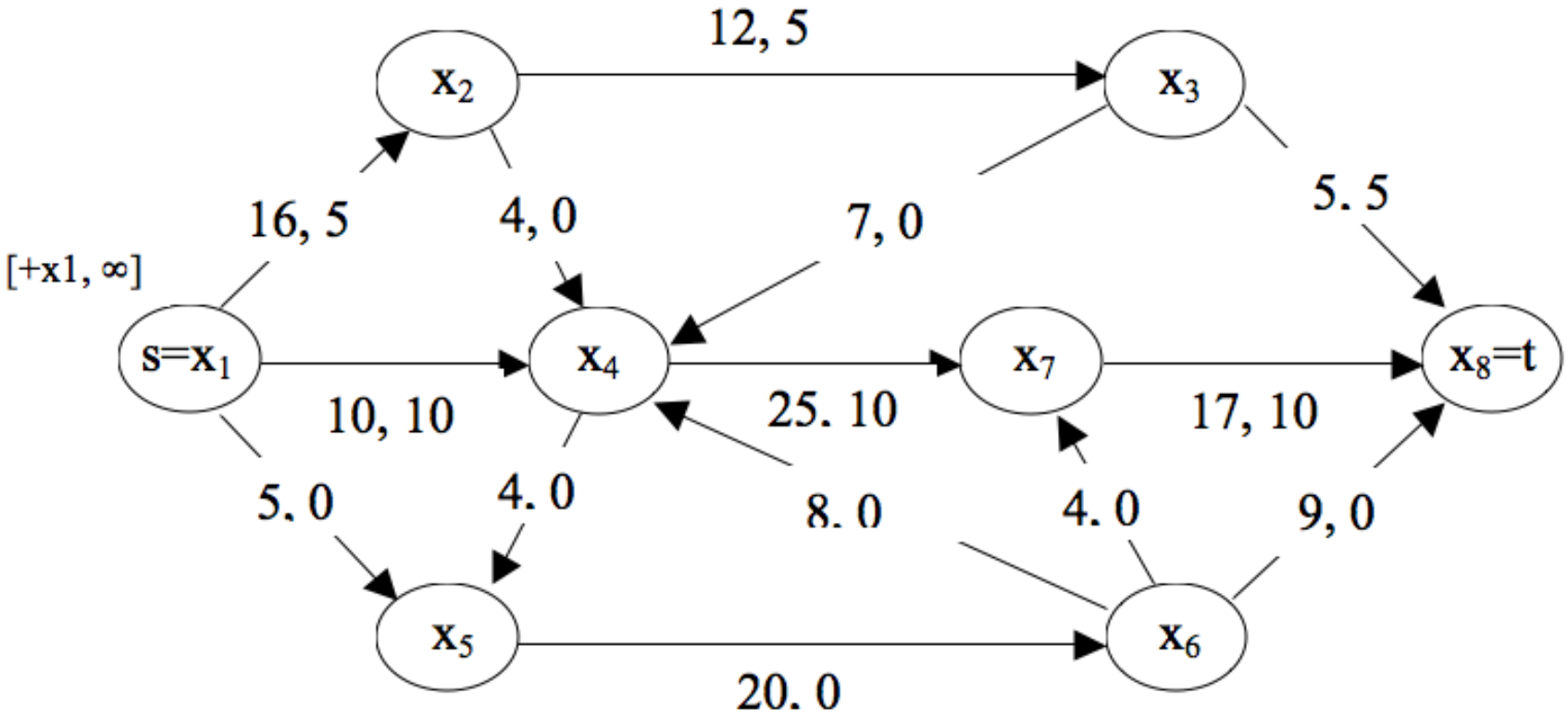
Bài tập

Lặp 2


[+x1, 11]
[+x2, 7]
12, 5
x2
x3
16, 5
4, 0
7, 0
5. 5
[+x1, ∞]
[+x1,10]
[+x4,10]
[+x7,10]
s=x1
x4
x7
x8=t
10, 0
25. 0
17. 0
5. 0
4. 0
8. 0
4. 0
9, 0
x5
x6
20. 0
[+x1, 5]

Bài tập

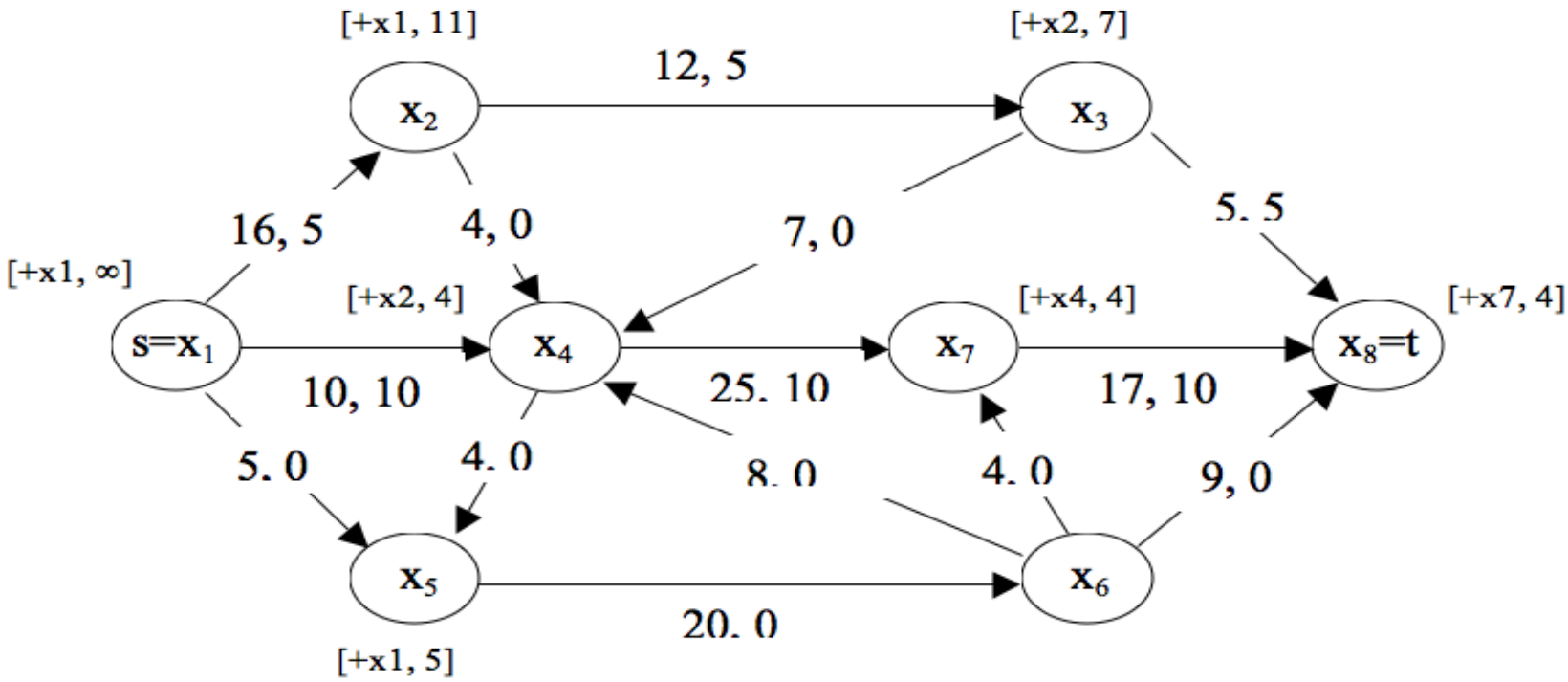
Tăng luồng



Bài tập

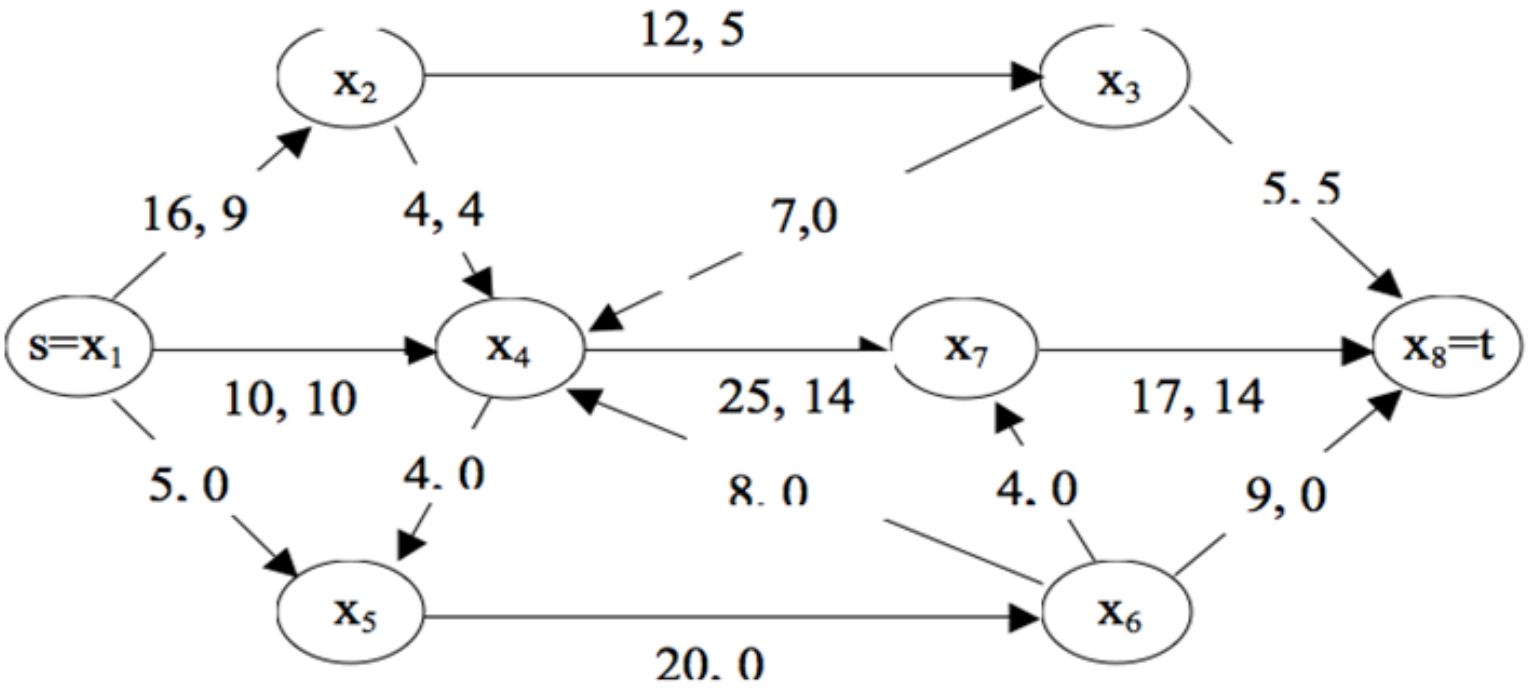
Đề thi năm 2012 (lần 2)

Lặp 3



Bài tập

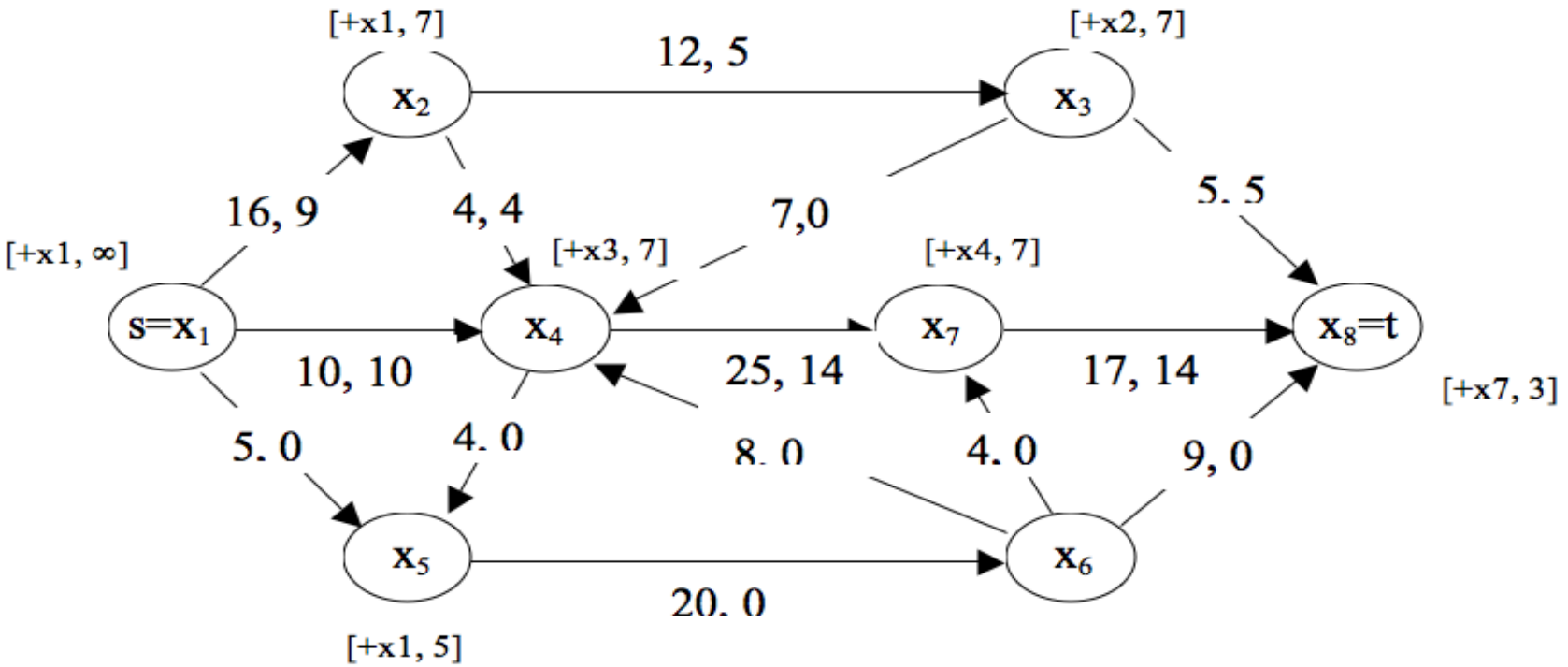
Đề thi năm 2012 (lần 2)



Bài tập

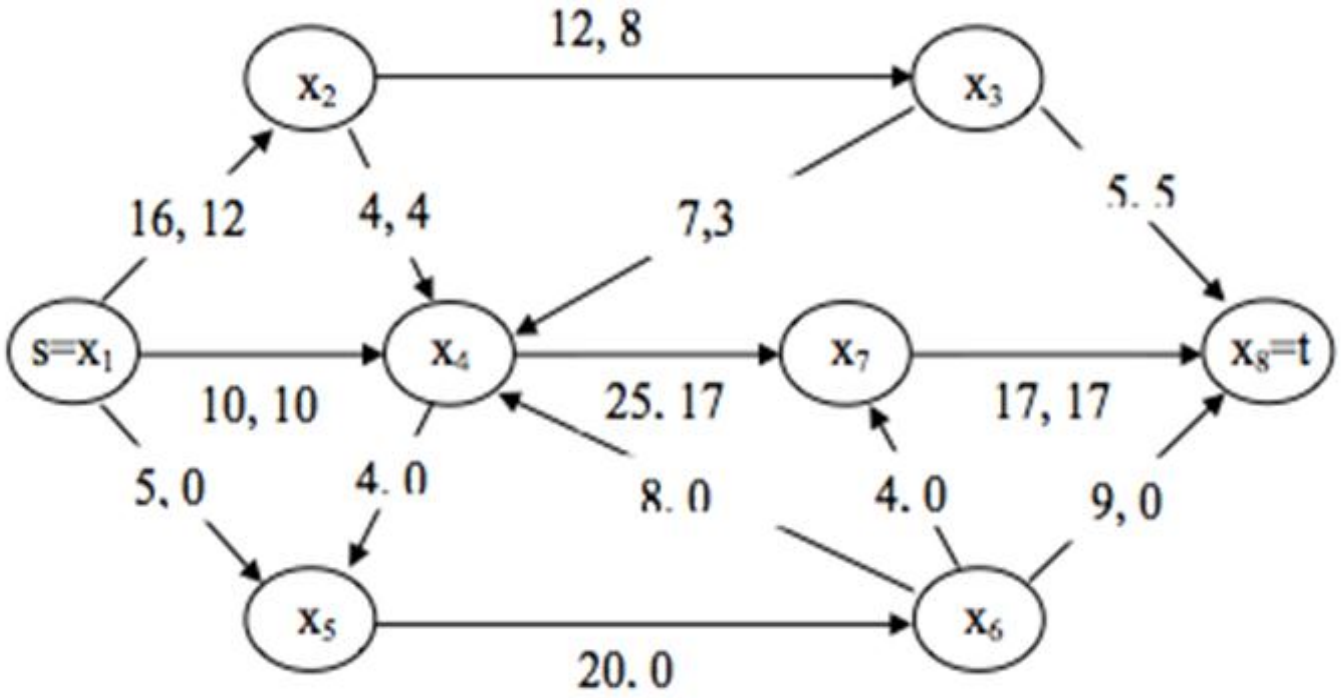
Đề thi năm 2012 (lần 2)

lặp 4



Bài tập

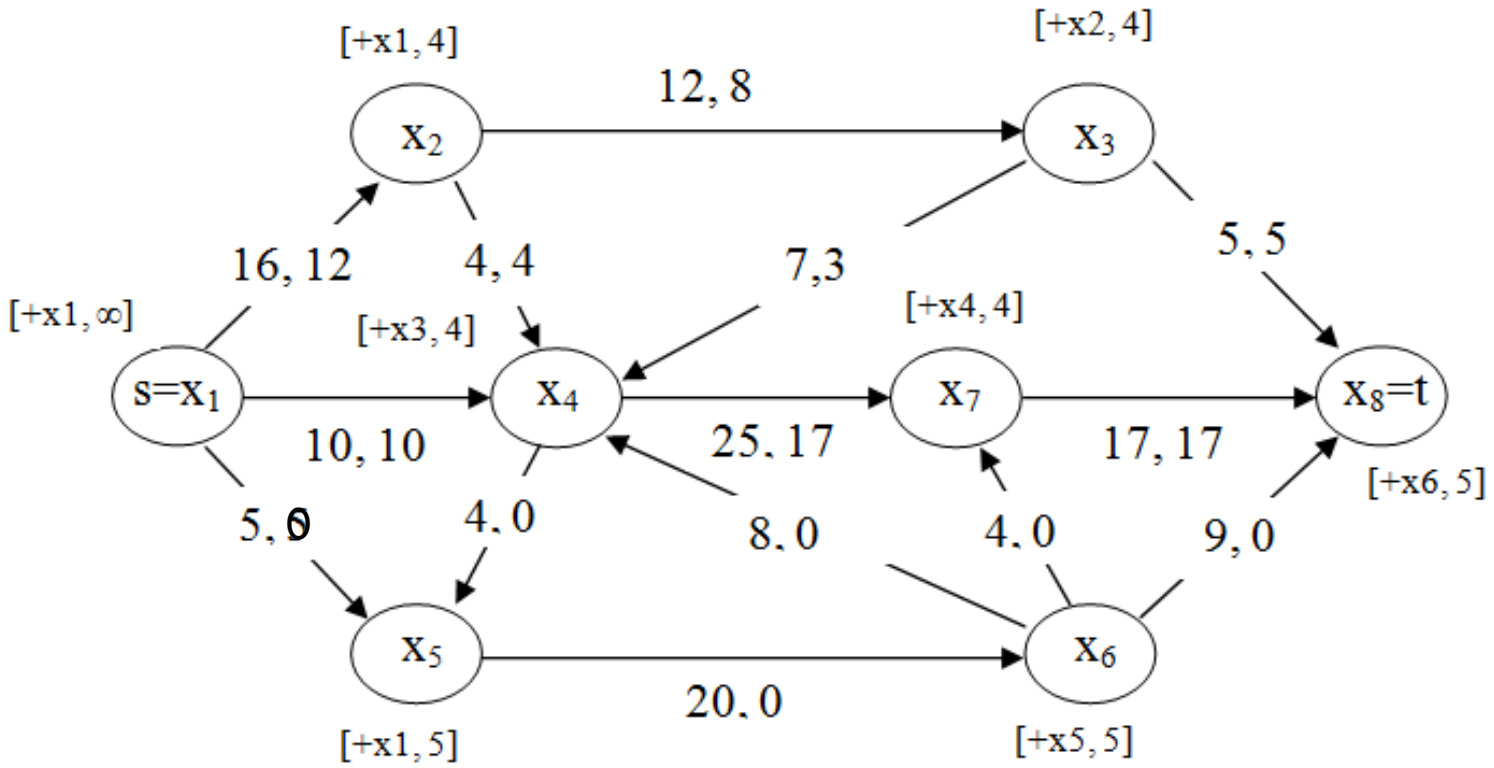
Tăng luồng



Bài tập

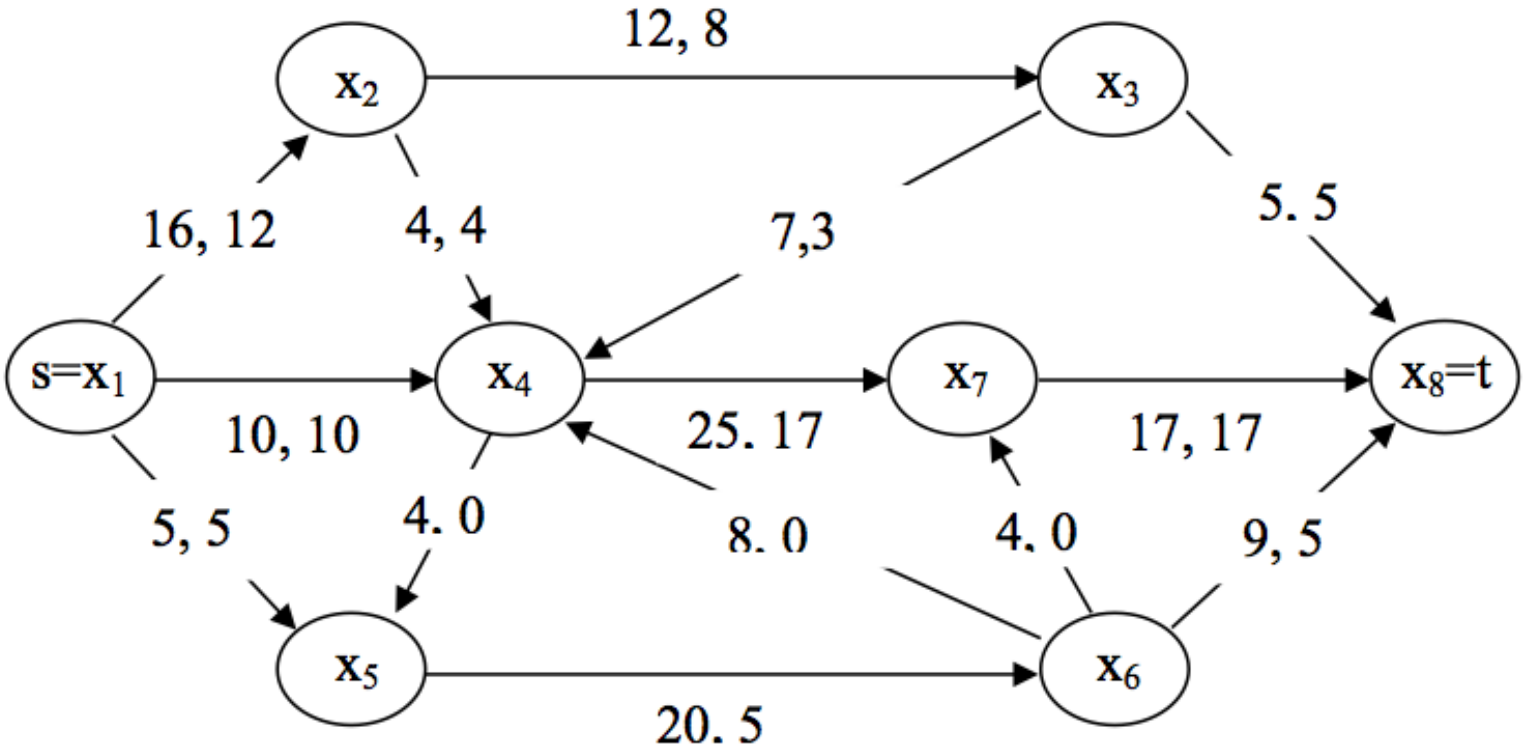
Đề thi năm 2012 (lần 2)

Lặp 5



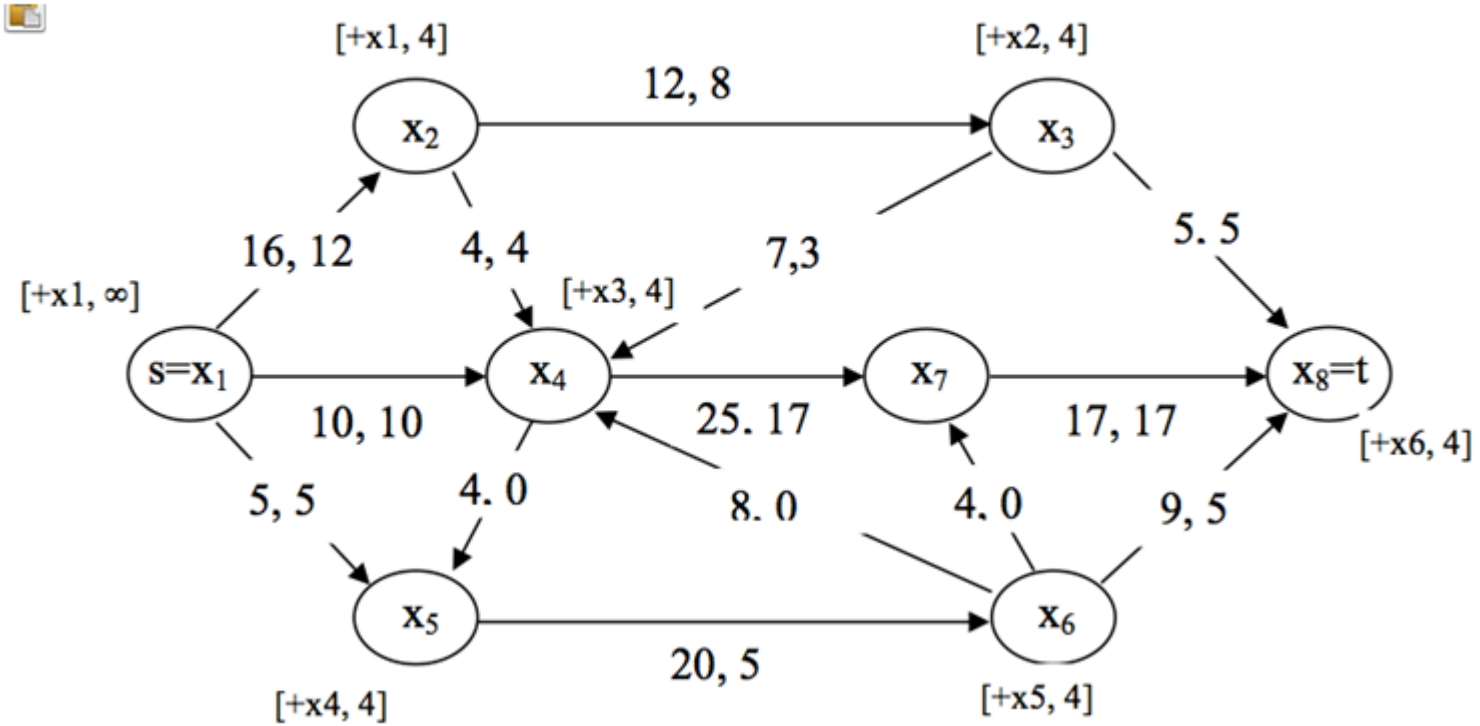
Bài tập

Đề thi năm 2012 (lần 2)



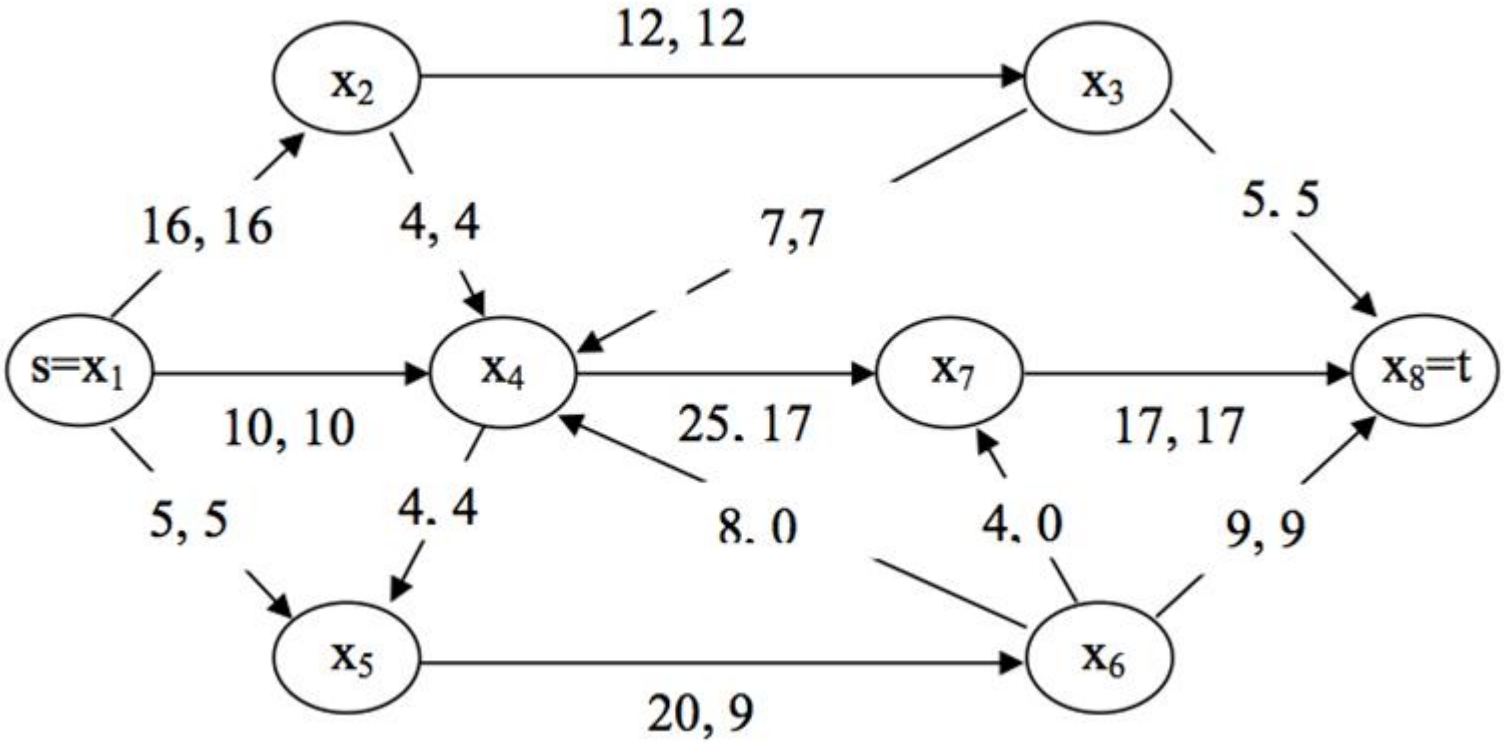
Bài tập

Lặp 6


[+x1, 4]
[+x2, 4]
12, 8
x2
x3
16, 12
4, 4
7,3
5. 5
[+x1, ∞]
[+x3, 4]
s=x1
x4
x7
x8=t
10, 10
25. 17
17, 17
[+x6, 4]
5, 5
4. 0
8. 0
4. 0
9, 5
x5
x6
20, 5
[+x4, 4]
[+x5, 4]

Bài tập

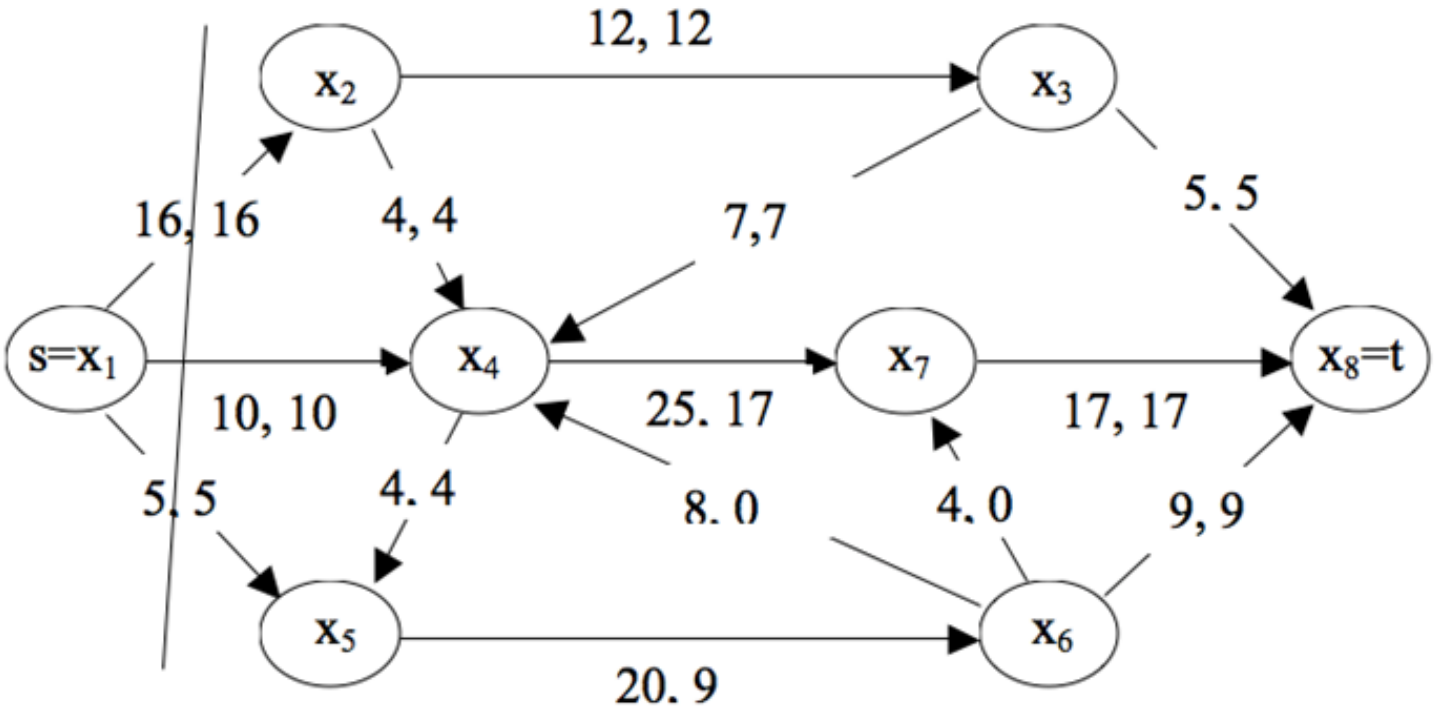
Tăng luồng



Bài tập

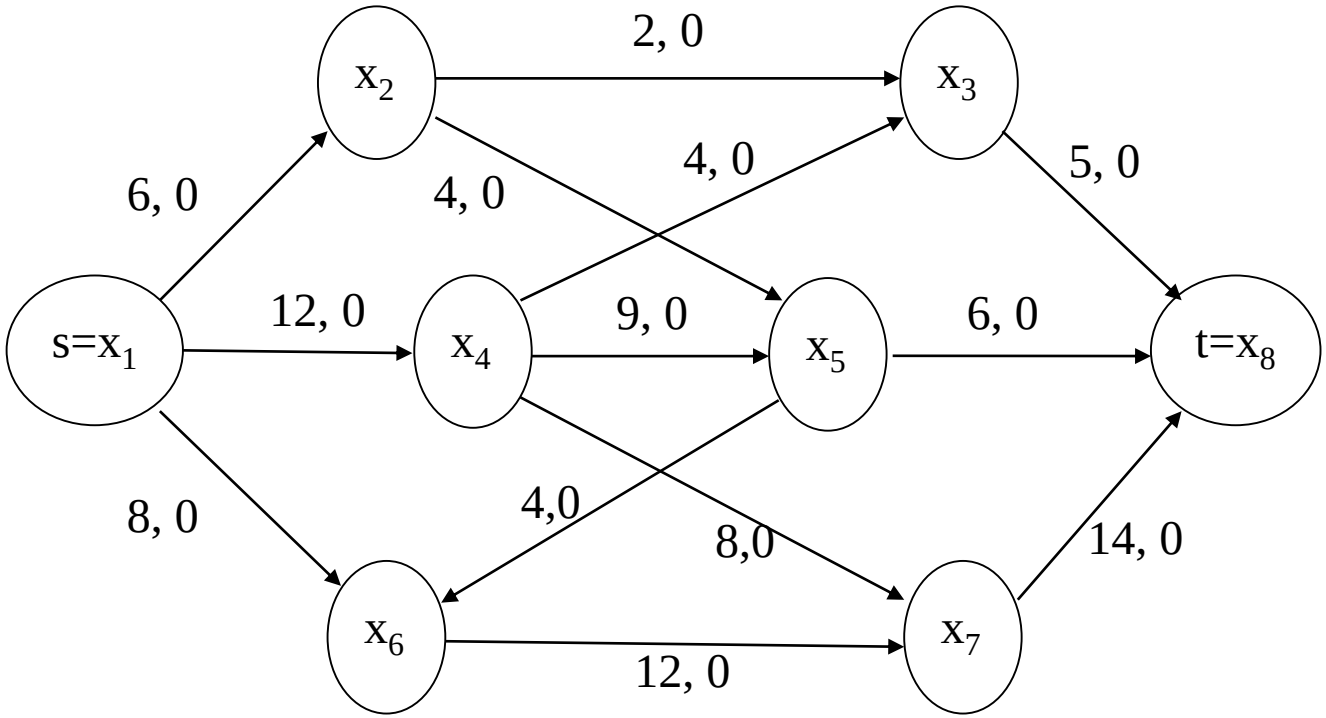
Lát cắt hẹp nhất: X_0 = { s=x1 }, Y_0 = { x2, x3, x4, x5, x6, x7, t=x8 }

Luồng cực đại = 16 + 10 + 5 = 31



Bài tập

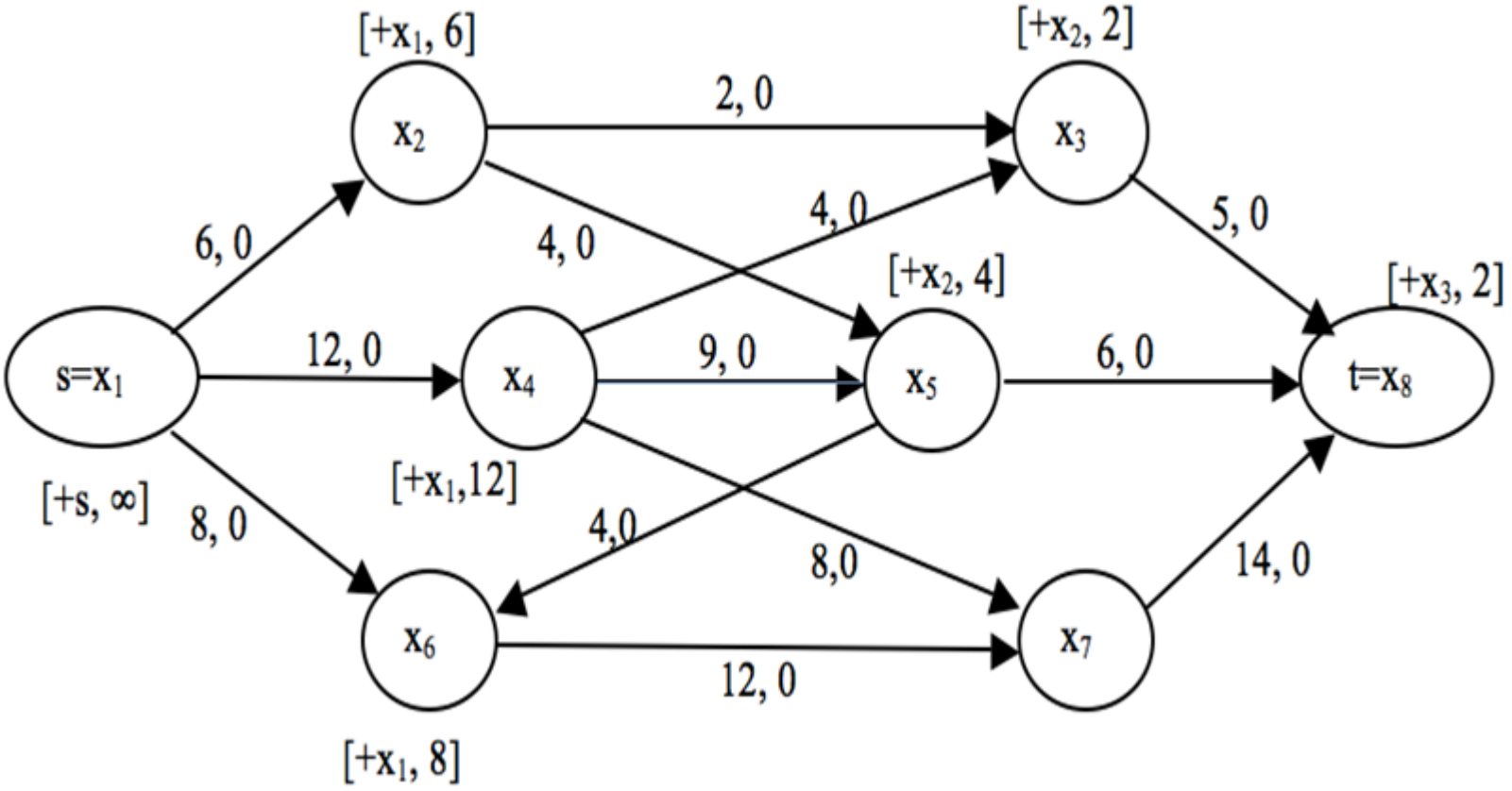
- **Đề thi năm 2013, đợt 2**



Bài tập

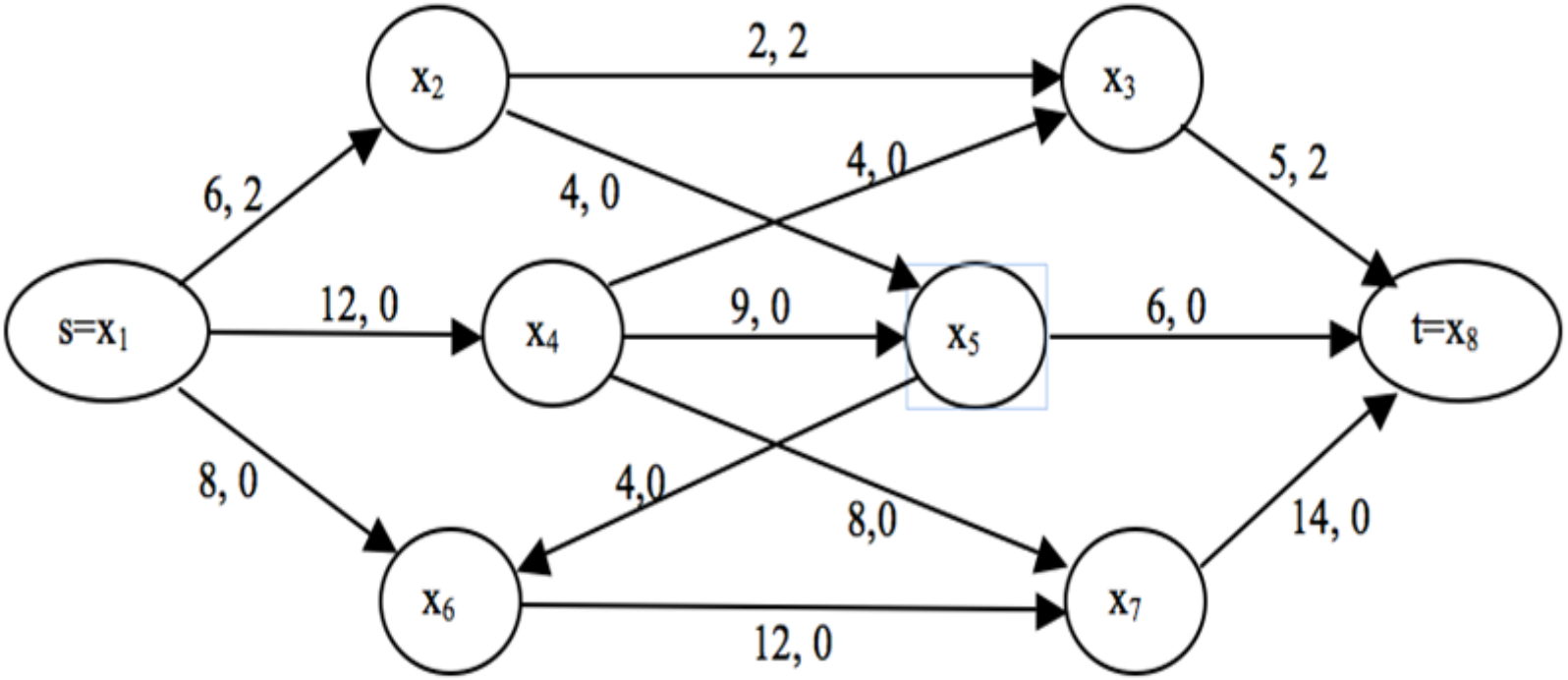
Gán nhãn

- **Lặp 1**



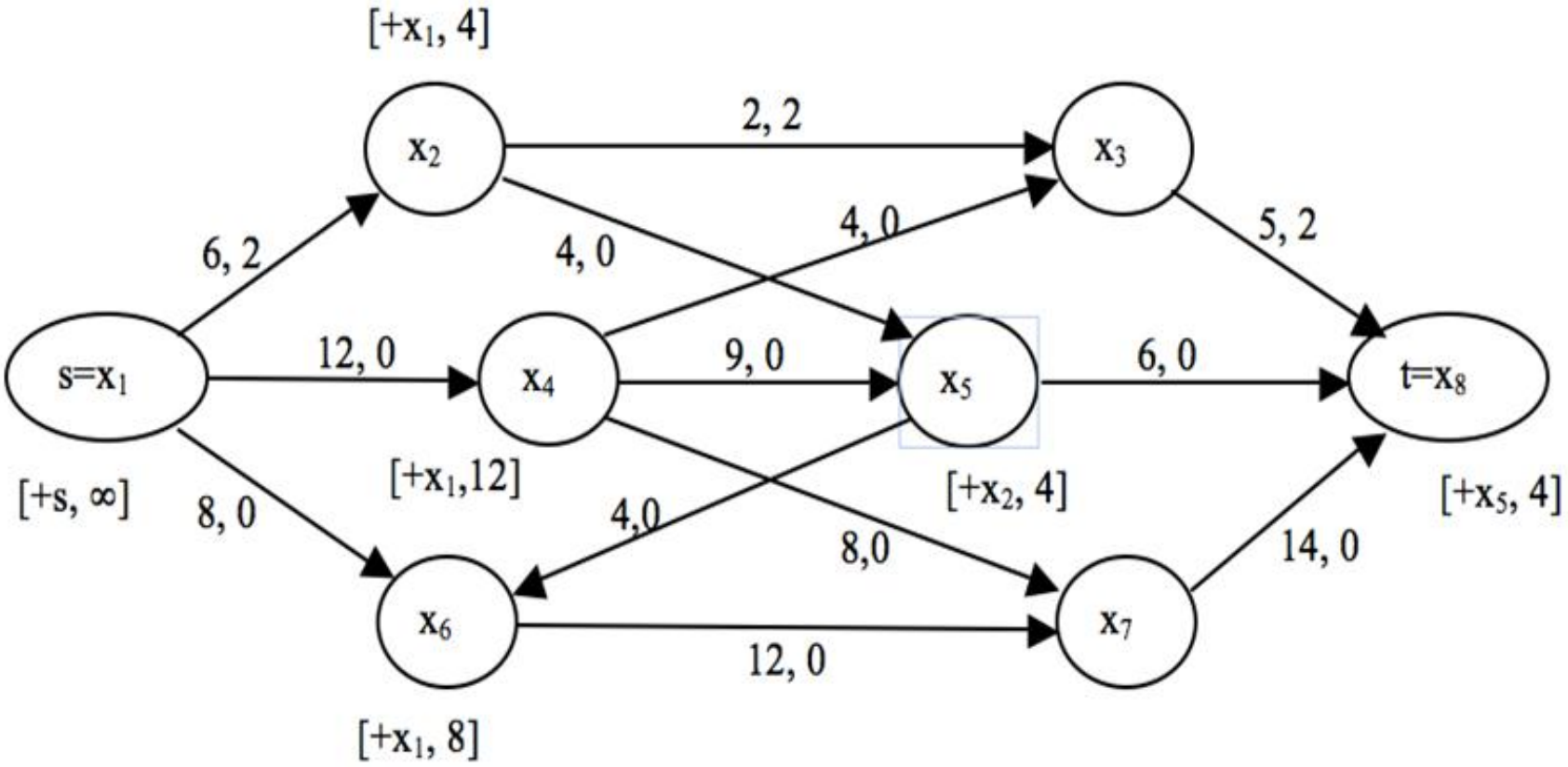
Bài tập

Tăng luồng



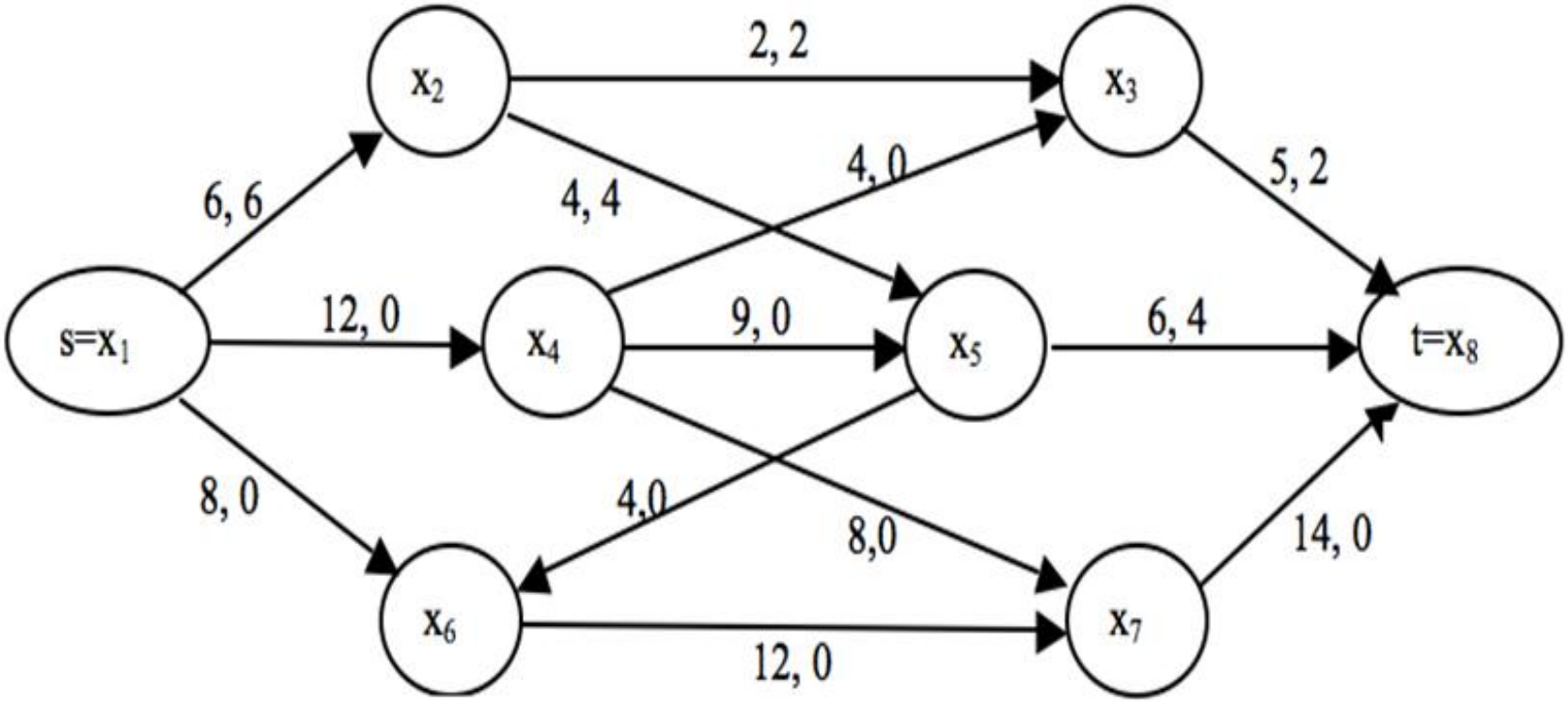
Bài tập

- **Lặp 2**


[+x1, 4]
x2
2, 2
x3
6, 2
4, 0
4, 0
5, 2
s=x1
12, 0
x4
9, 0
x5
6, 0
t=x8
[+s, ∞]
[+x1,12]
[+x2, 4]
[+x5, 4]
8, 0
4,0
8,0
14, 0
x6
x7
12, 0
[+x1, 8]

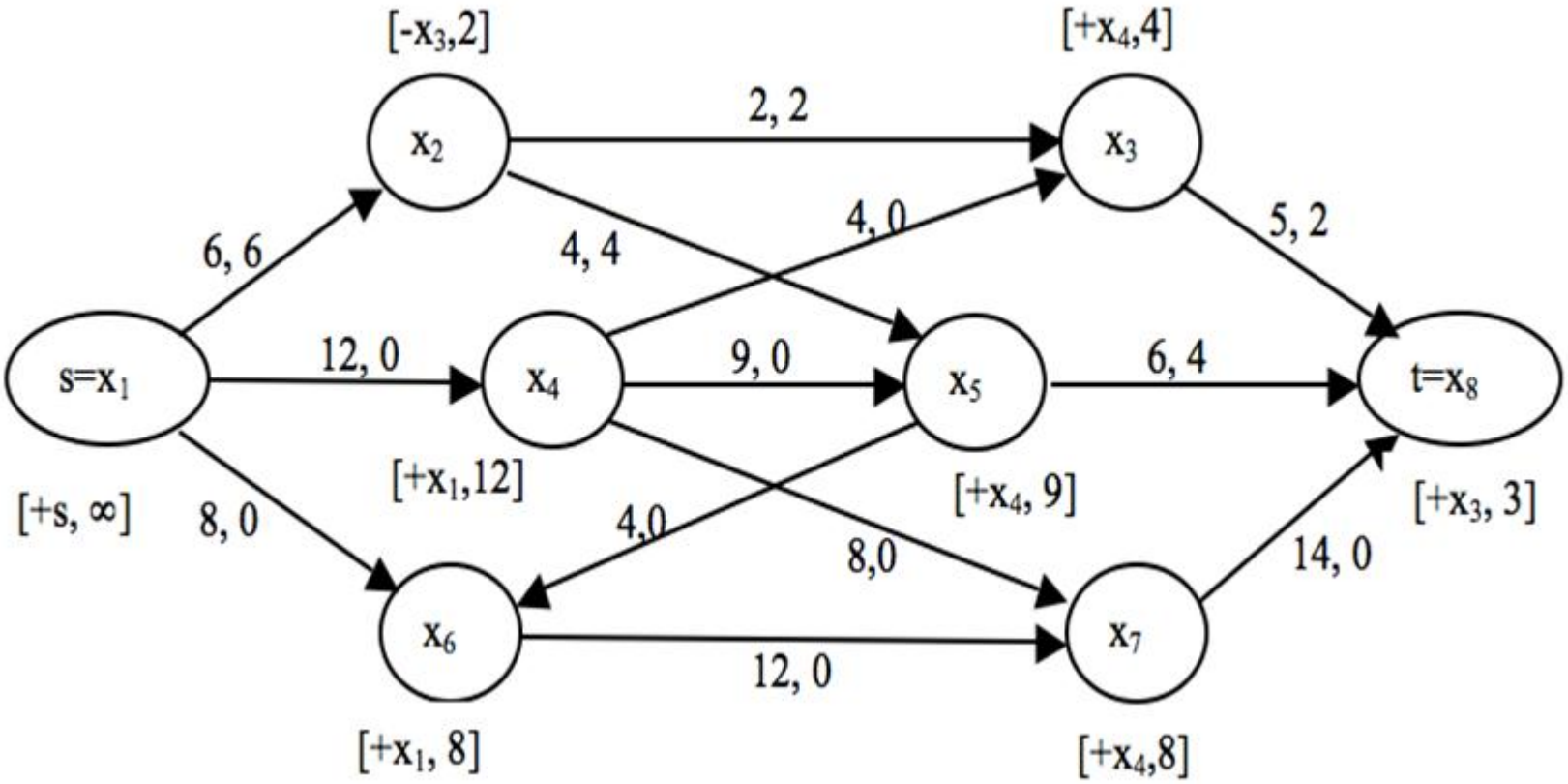
Bài tập

Tăng luồng

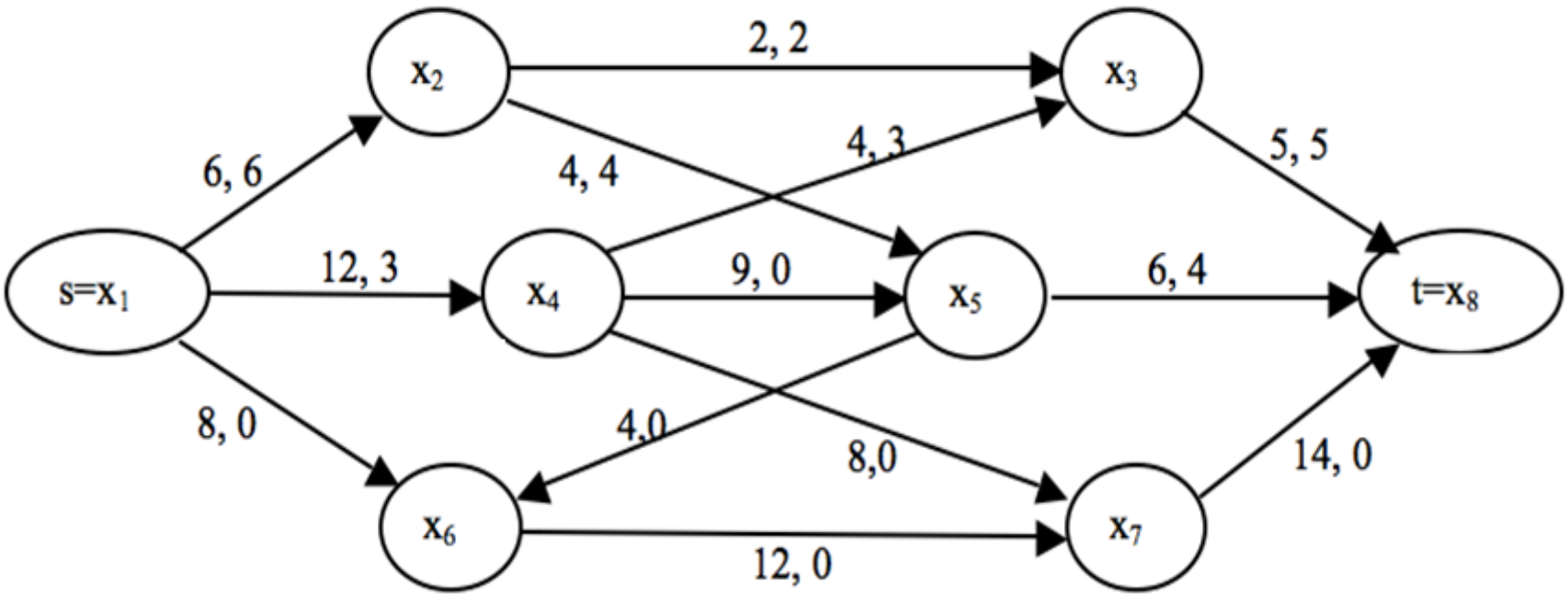


Bài tập

- **Lặp 3**

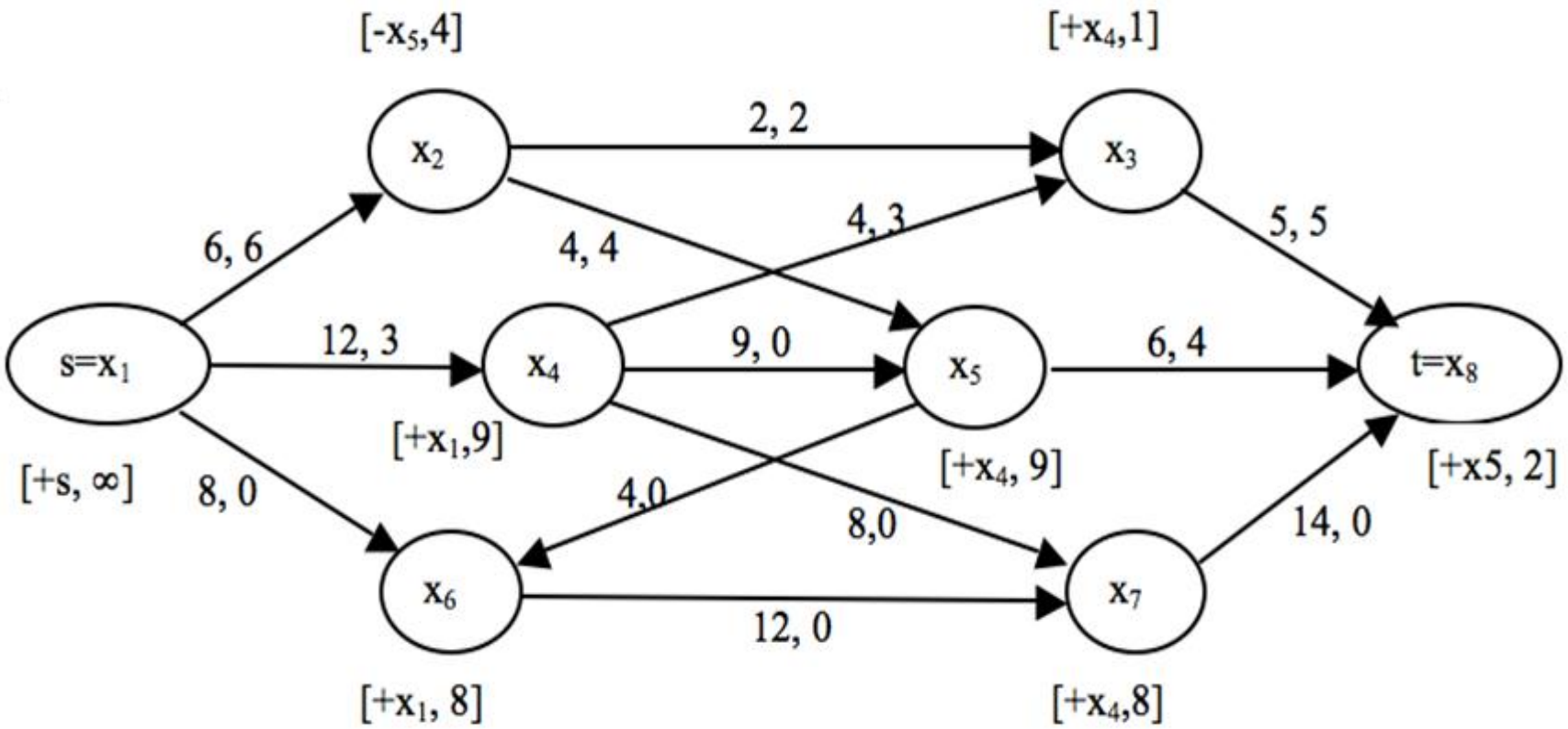

[-x3,2]
[+x4,4]
x2
x3
2, 2
6, 6
4, 4
4, 0
5, 2
s=x1
x4
x5
t=x8
12, 0
9, 0
6, 4
[+s, ∞]
[+x1,12]
[+x4, 9]
[+x3, 3]
8, 0
4,0
8,0
14, 0
x6
x7
12, 0
[+x1, 8]
[+x4,8]

Bài tập

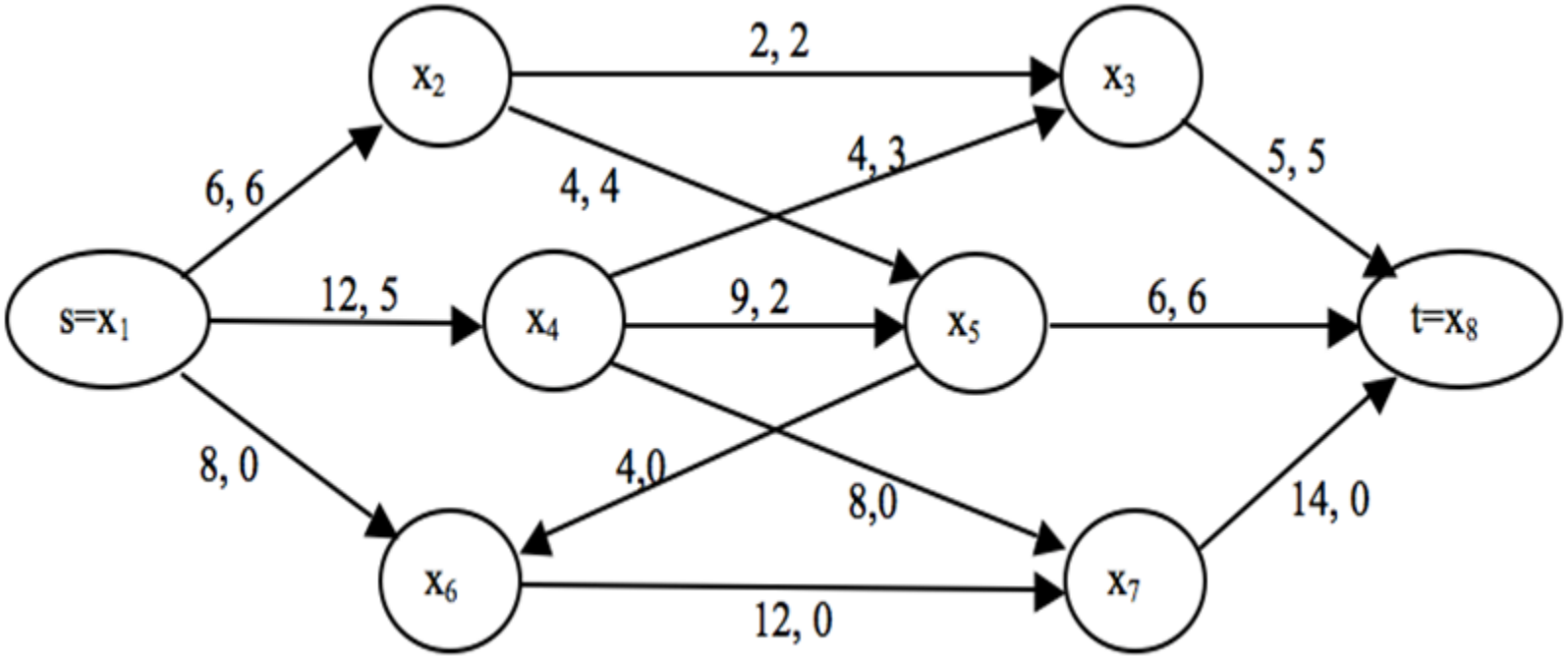


Bài tập

- **Lặp 4**

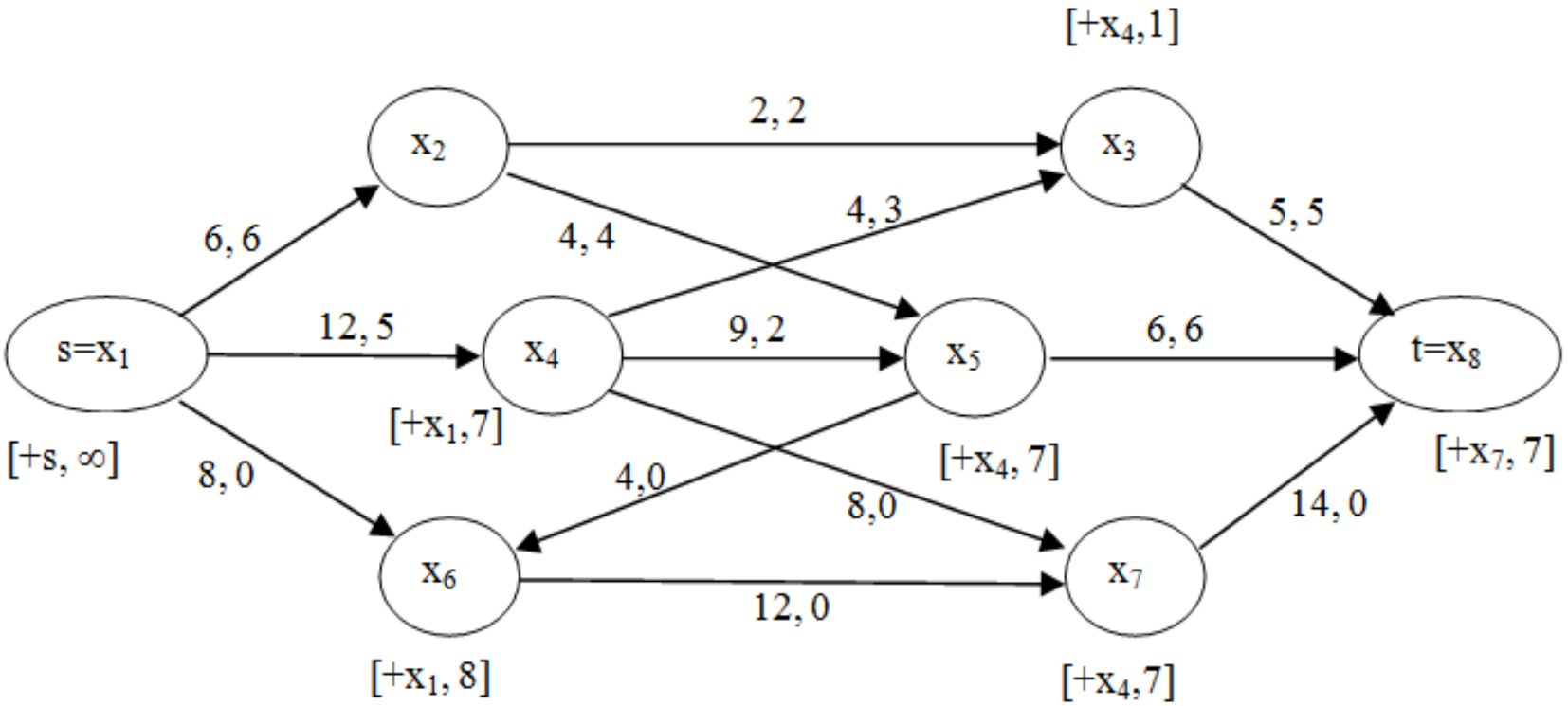

[-x5,4]
[+x4,1]
x2
x3
2, 2
6, 6
4, 4
4, 3
5, 5
s=x1
12, 3
x4
9, 0
x5
6, 4
t=x8
[+x1,9]
[+s, ∞]
8, 0
4,0
8,0
[+x4, 9]
[+x5, 2]
14, 0
x6
x7
12, 0
[+x1, 8]
[+x4,8]

Bài tập

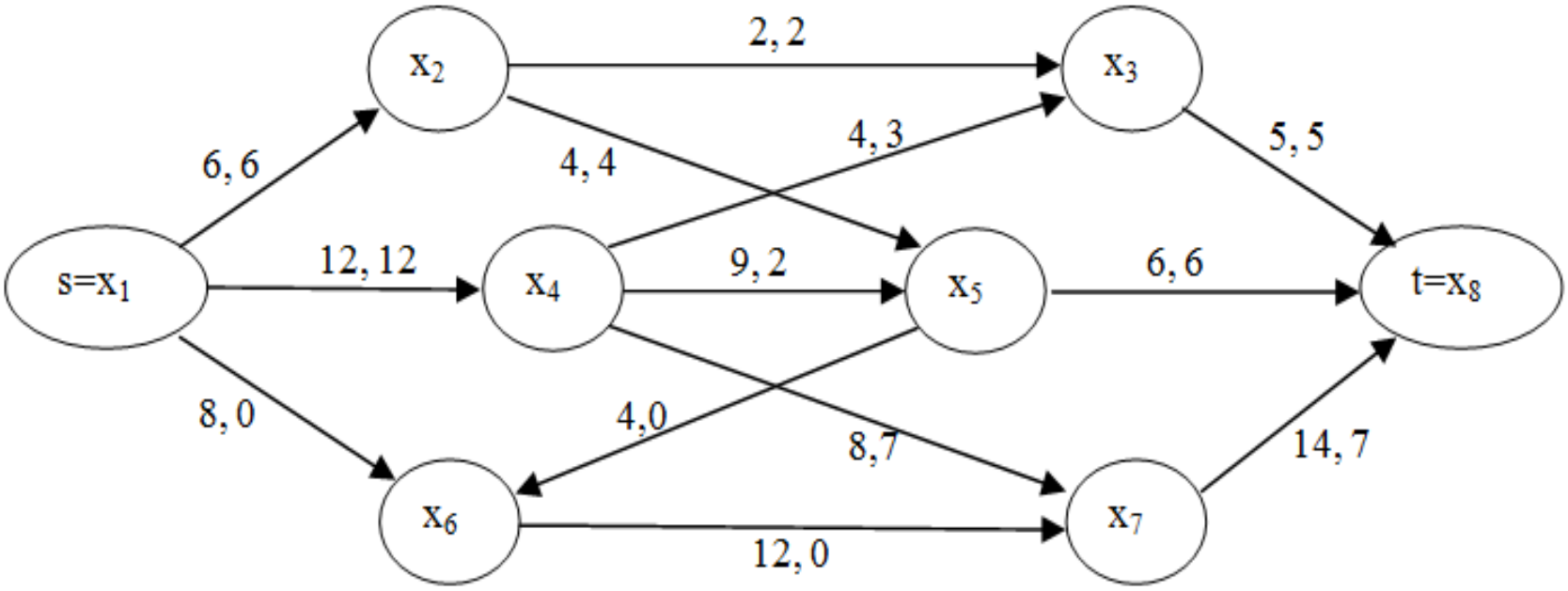


Bài tập

- **Lặp 5**

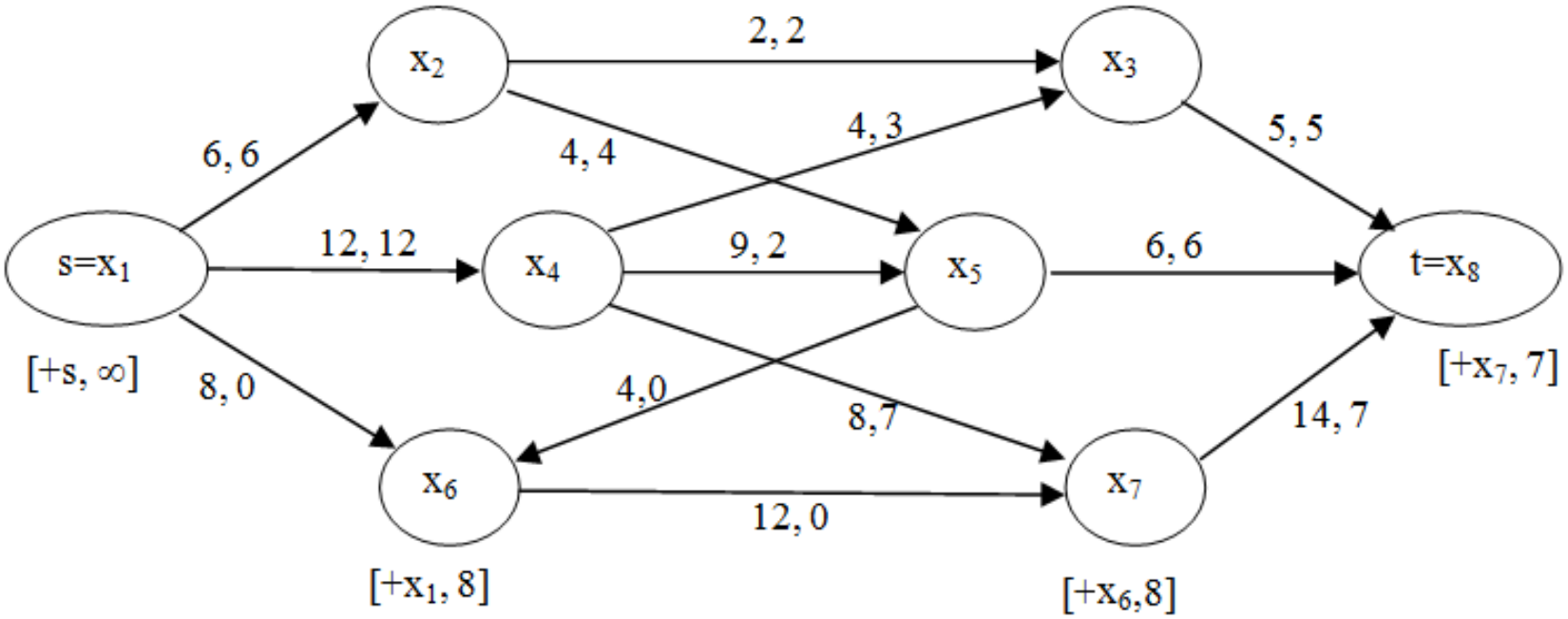

[+x4,1]
x2
2, 2
x3
6, 6
4, 4
4, 3
5, 5
s=x1
12, 5
x4
9, 2
x5
6, 6
t=x8
[+s, ∞]
[+x1,7]
[+x4, 7]
[+x7, 7]
8, 0
4,0
8,0
14, 0
x6
x7
12, 0
[+x1, 8]
[+x4,7]

Bài tập



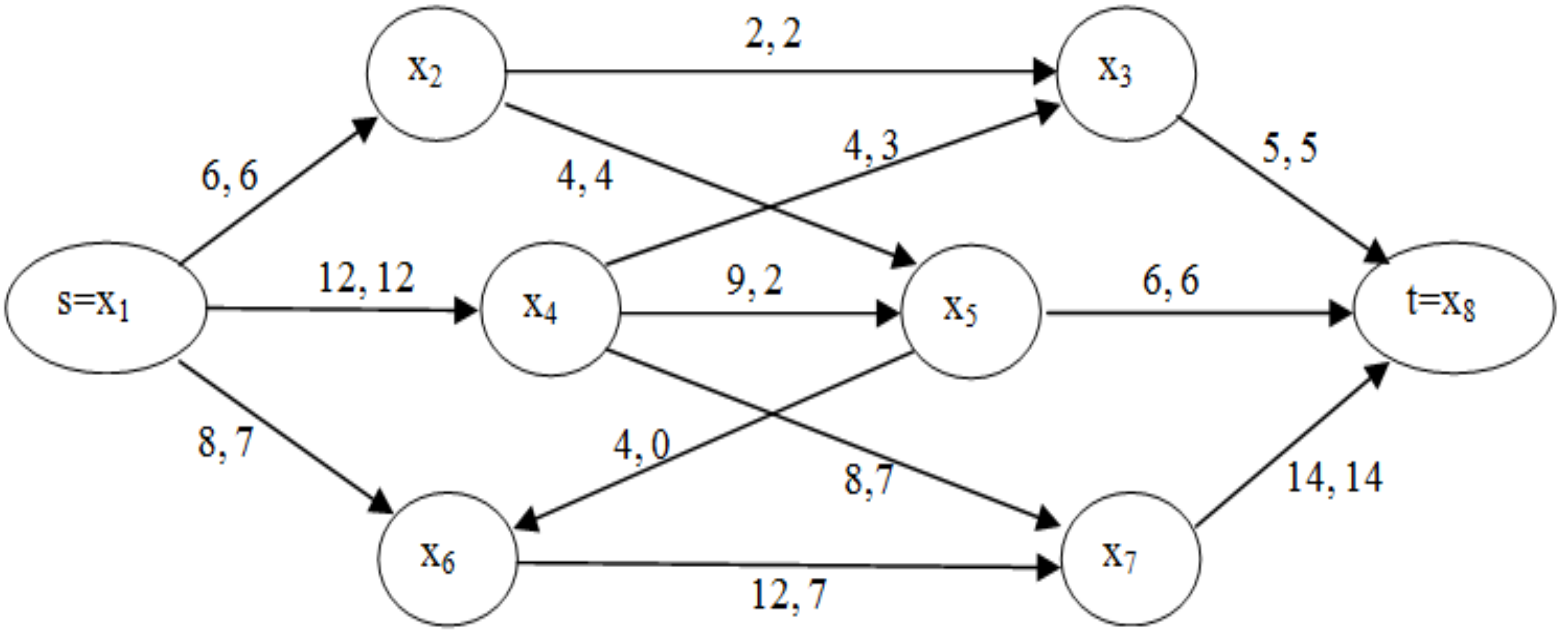
Bài tập

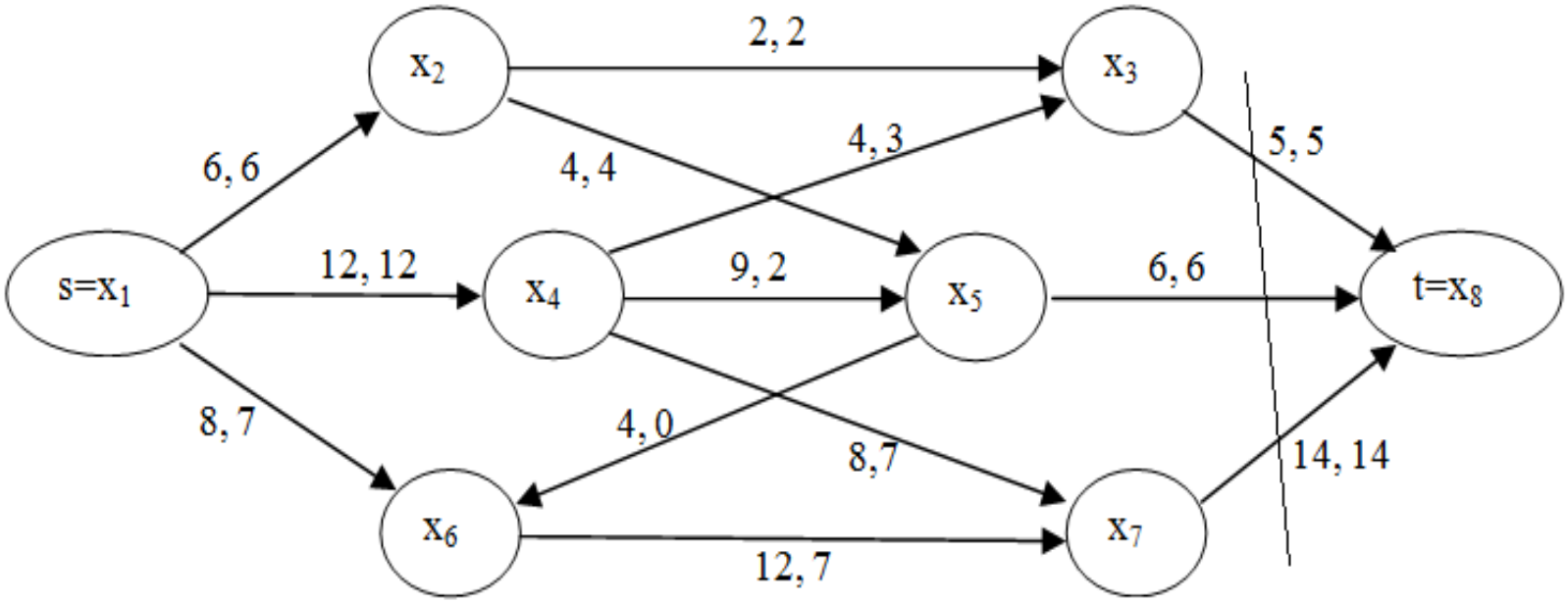
- **Lặp 6**


x2
2, 2
x3
6, 6
4, 4
4, 3
5, 5
s=x1
12, 12
x4
9, 2
x5
6, 6
t=x8
[+s, ∞]
8, 0
4,0
8,7
14, 7
[+x7, 7]
x6
x7
12, 0
[+x1, 8]
[+x6,8]

Bài tập

Tăng luồng



Bài tập

Lát cắt hẹp nhất: X = {x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7}, Y = {x_8}
Luồng cực đại = 5 + 6 + 14 = 25